0.1 Derived fanctor

Abelian category 間の left or right exact additive fanctor である $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ に対し、$L_*F, R^*F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を derived fanctor と呼んだわけだが、本題は $\mathbf{L}F, \mathbf{R}F : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ という fanctor を構成したいのである。だが、これは L_*F, R^*F の構成を真似ることで定義できる。L_*F や R^*F は $\mathcal{A}$ の object に対し、projective や injective resolusion を取ったのだった。これは $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ という $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$、あるいは $\mathrm{Co}(\mathcal{A})$ での object と quasi isomorphic な complex で各 object が projective、あるいは injective なものだ。そこで、一般の $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$、$\mathrm{Co}(\mathcal{A})$ の object である A_*や A^* にもこのような complex は存在しないか？というのがひとつの疑問である。

以下では、次数設定の関係上 $A^* \in \mathrm{Co}(\mathcal{A})$ で考える。$\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ でも同様な結果を得ることができる。そして、DGM の時と同様負次元においては 0 であるような chain complex を object にもつ $\mathrm{Co}(\mathcal{A})$ の full sub category である $\mathrm{Co}^+(\mathcal{A})$ で考える。

Theorem 0.1.1

$A^* \in \mathrm{Co}^+(\mathcal{A})$ に対し、次の条件を満たす $I^* \in \mathrm{Co}^+(\mathcal{A})$ が chain homotopy 同値を除いて一意に存在する。

1. $A^* \longrightarrow I^*$: quasi isomorphism が存在する。
2. 各 I^n は injective

proof)　一般に abelian category の obeject に対して、$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ という短完全列があったとき、X と Z の injective resolusion を I^*, J^* とすれば、

$I^* \oplus J^*$ が Y の injective resolusion となり、

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] \arrow[u] & I^1 \oplus J^1 \arrow[r] \arrow[u] & J^1 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] \arrow[u] & I^0 \oplus J^0 \arrow[r] \arrow[u] & J^0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[u] & Y \arrow[r] \arrow[u] & Z \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

の可換図式があり、横列は短完全になるということがあった。これを踏まえて、以下の状況を考えていく。

$A^* = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow A^n \xrightarrow{d^n} \cdots \in \mathrm{Co}^+(\mathcal{A})$ をとる。このとき、以下のような短完全列を考えよう。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^0 \longrightarrow A^0 \longrightarrow \mathrm{Im}d^0 \longrightarrow 0 \qquad \cdots (1)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}d^0 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^1 \longrightarrow H^1(A) \longrightarrow 0 \qquad \cdots (2)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^1 \longrightarrow A^1 \longrightarrow \mathrm{Im}d^1 \longrightarrow 0 \qquad \cdots (3)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}d^1 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^2 \longrightarrow H^2(A) \longrightarrow 0 \qquad \cdots (4)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}d^2 \longrightarrow A^2 \longrightarrow \mathrm{Im}d^2 \longrightarrow 0 \qquad \cdots (5)$$

まず初めに、(1) で $\mathrm{Ker}d^0$ と $\mathrm{Im}d^0$ の injective resolusion をとって、A^0 の resolusion である $I^{0,*}$ を構成する。

次に (2) で先ほどの $\mathrm{Im}d^0$ の resolusion はそのままに、$H^1(A)$ の resolusion を決めて、$\mathrm{Ker}d^1$ の resolusion を構成する。今度はそれを用い、(3) に移って、$\mathrm{Im}d^1$ の reslusion を取って A^1 の resolusion である $I^{1,*}$ を構成。次は (3) で $\mathrm{Im}d^1$ の resolusion を用いて (4) へ。この構成を繰り返せば、injective object からなる complex である $I^{*,n}$ が得られ、しかも、図を追っかけていけば chain map である $I^{*,n} \longrightarrow I^{*,n+1}$ も構成できる。さらに、これは 2 回合成すると完全列を経由するため 0 となる。よって、

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\
I^{0,1} \arrow[r] \arrow[u] & I^{1,1} \arrow[r] \arrow[u] & I^{2,1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & I^{n,1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
I^{0,0} \arrow[r] \arrow[u] & I^{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & I^{2,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & I^{n,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
A^0 \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon^0"] & A^1 \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon^1"] & A^2 \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon^2"] & \cdots \arrow[r] & A^n \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon^n"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

の可換図があり、縦列横列ともに chain complex であるので、I^{**} は double chain complex である。さて、この spectral sequence である E_r^{**} を考えるのだが、

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(GI^{p,*}) = H^q(I^{p,*}) = 0 \qquad (q \geqq 1)$$

であり、$E_1^{p,0} = A^p$ である。よって、

$$
\begin{tikzcd}
E_1^{0,0} \arrow[r, "d_1^{0,0}"] \arrow[d, "="'] & E_1^{1,0} \arrow[r, "d_1^{1,0}"] \arrow[d, "="'] & E_1^{2,0} \arrow[r, "d_1^{2,0}"] \arrow[d, "="'] & \cdots \\
A^0 \arrow[r, "d^0"'] & A^1 \arrow[r, "d^1"'] & A^2 \arrow[r, "d^2"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

なので、$E_2^{p,0} = H^p(E_1^{*,0}) = H^p(A)$ となります。また、微分を考えると

$$0 = E_2^{p-2,1} \longrightarrow E_2^{p,0} \longrightarrow E_2^{p+2,-1} = 0$$

なので、$I^n = \coprod_{p+q=n} I^{p,q}$ とおいたときに、

$$E_2^{p,0} \cong E_3^{p,0} \cong \cdots E_\infty^{p,0} = GH^p(I) = H^p(I)$$

よって、ε から $H^*(A) \xrightarrow{\cong} H^*(I)$ が導けるので、$A^* \longrightarrow I^*$ が quasi isomorphism が存在する。さらに、各 I^n は injective object の $I^{p,q}$ の直積（有限なので＝直和）なので、I^n も injective object である。

$\square$

この I^* を A^* の injective replacement と呼び、A^* の分解の仕方を Cartan-Eilenberg 分解と呼ぶ。

Definition 0.1.2

$F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ を abelian category 間の左完全加法的関手とする。このとき、$\mathbf{R}F:\mathcal{D}^+(\mathcal{A})\longrightarrow\mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ が次のように定義できる。

object に対しては、$A^*\in\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ に対し、その injective replacement である $I^*\in\mathcal{A}^*$ を考え、

$$\mathbf{R}F(A^*)=F(I^*)$$

により定義する。I^* は $K(\mathcal{A})$ 内では同型を除いて一意に存在する。問題は morphism である。

$\varphi=f^*/s^*\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*,B^*)$ を取る。つまり $K^+(\mathcal{A})$ においては、$A^*\xrightarrow{f^*}C^*\xleftarrow{s^*}B^*$ でその類が φ である。ここで、C^* の injective replacement である J^* を考えることにより、φ は $A^*\xrightarrow{f^*}J^*\xleftarrow{s^*}B^*$ と考えてよい。つまり、$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 内では同じとなる。また、$t^*:A^*\longrightarrow I^*$ を A^* の injective replacement とし、$I^*\xleftarrow{t^*}A^*\xrightarrow{f^*}J^*$ の push out を K^* とする。

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[d, "t^*"'] \arrow[rr, "f^*"] & & B^* \arrow[d, "s^*"] \\ I^* \arrow[dr, "h^*"'] & & J^* \arrow[dl, "u^*"] \\ & K^* & \end{tikzcd}$$

であり、ただし K^* は injective replacement で置き換え injective object からなる complex と仮定してもかまわない。これを F で移して $\mathrm{Co}(\mathcal{B})$ に持っていくと、

$$\begin{tikzcd} F(A^*) \arrow[d, "F(t^*)"'] \arrow[drr, "F(f^*)"] & & F(B^*) \arrow[d, "F(s^*)"] \\ F(I^*) \arrow[dr, "F(h^*)"'] & & F(J^*) \arrow[dl, "F(u^*)"] \\ & F(K^*) & \end{tikzcd}$$

であるが、$u^* : J^* \longrightarrow K^*$ は injective obeject からなる complex 間の quasi isomorphism であり、$F(u^*)$ は quasi isomorphism となる。よって、$\mathcal{D}(\mathcal{B})$ 内で、$F(h^*)/F(u^*) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}(F(I^*), F(J^*))$ が定義できる。これより、

$$\mathbf{R}F\varphi = F(h^*)/F(u^*) : \mathbf{R}F(A^*) \longrightarrow \mathbf{R}F(B^*)$$

と定義し、fanctor

$$\mathbf{R}F : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$$

を定め F の right derived fanctor と呼ぶ。

同様に $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を left exact additive fanctor とすれば、$\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ を主体に考えて、left derived fanctor である $\mathbf{L}F : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ が定義できる。